Über aus unendlich vielen Faktoren entspringende Produkte *

Leonhard Euler

§1 Wenn in der Analysis zu Größen solcher Art gelangt wird, die weder mit rationalen noch irrationalen Zahlen erklärt werden können, pflegen unendliche Ausdrücke, um die Größen zu bezeichnen, verwendet zu werden; diese sind umso mehr als geeignet anzusehen, umso schneller mit deren Hilfe zur Erkenntnis und Einschätzung der mit ihnen ausgedrückten Größen gelangt wird. Am größten und weitreichendsten ist der Gebrauch von Ausdrücken dieser Art daher, um die Werte von transzendenten Größen, von welcher Art Logarithmen, Kreisbogen und andere durch Quadraturen von Kurven bestimmte Größen sind, darzustellen und mit deren Hilfe gelangen wir zu einer so genauen Erkenntnis sowohl von Logarithmen, also auch von vielen anderen transzendenter Größen. Ja unendliche Ausdrücke von dieser Art bringen sogar einen riesigen Nutzen mit sich, um irrationale Größen und die Wurzeln von algebraischen Gleichungen durch rationale Zahlen näherungsweise zu bestimmen; diese, wenn der Nutzen betrachtet wird, sind den wahren Ausdrücken meisten weit vorzuziehen.

§2 Von unendlichen Ausdrücken dieser Art sind aber gewisse einander im höchsten verschiedene Geschlechter festzulegen, deren erstes alle unendlichen Reihen in sich umfasst, die aus unendlich vielen mit den Zeichen $+$ und $-$ verbundenen Termen bestehen; diese Lehre ist nun freilich schon dermaßen

*Originaltitel: "De productis ex infinitis factoribus ortis", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11* 1750, pp. 3-31", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 260 - 290", Eneström-Nummer E122, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" entwickelt worden, dass man nicht nur mehrere Methoden hat, so algebraische wie transzendente Größen dieser Art mit unendlichen Reihen auszudrücken, sondern auch nach Vorlegen einer unendliche Reihe zu untersuchen, eine Größe welcher Art mit ihr erklärt wird. Denn es ist von Nöten, dass unendliche Ausdrücke jedes Geschlechts auf zwei Arten behandelt werden, von welchen die eine in der Umwandlung entweder algebraischer oder transzendenter Größen in unendliche Ausdrücke besteht, die andere hingegen umgekehrt in der Erforschung jener Größe, welche der vorgelegte unendliche Ausdruck bezeichnet, gelegen ist.

§3 Es ist passend, dass zum anderen Geschlecht von unendlichen Ausdrücken die gezählt werden, die aus unzähligen Faktoren bestehen; obwohl von dieser Art schon mehrere Ausdrücke gefunden und bekannt worden sind, ist dennoch weder eine Art zu ihnen zu gelangen noch ein Weg deren Werte zu erkennen jemals dargelegt worden. Gleichermaßen würdig aber scheinen unendliche Ausdrücke dieses Geschlechts, dass sie entwickelt werden, wie die ersten aus einer unendlichen Anzahl von Termen bestehenden, und unter Umständen wird mit deren Behandlung für die Analysis nicht wenig von Vorteil geschaffen. Denn außerdem, weil Ausdrücke von dieser Art die Natur der Größen, welche sie bezeichnen, hinreichend klar vor Augen fhren und oftmals, um gute Näherungswerte zu finden, äußerst geeignet sind, leisten sie einen riesigen Nutzen, um die Logarithmen der Größen selbst zu bilden, was in einer Rechnung sehr oft den höchsten Nutzen mitbringt. Wenn so irgendeine Größe X in einen Ausdruck dieser Art transformiert war

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\text{etc}$$

wird man sofort den Logarithmus der Größe X haben

$$\ln\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\ln\left(\frac{b}{\beta}\right)+\ln\left(\frac{c}{\gamma}\right)+\ln\left(\frac{d}{\delta}\right)+\text{etc}$$

welche Reihe umso mehr konvergiert, um so näher sich jene Faktoren sich zur Einheit neigen. Dieses Grundes wegen habe ich beschlossen, in dieser Abhandlung die Theorie von unendlichen Ausdrücken dieser Art, so viel freilich haben meine Beobachtungen an Hilfe an die Hand zu geben, zu beginnen, damit es für andere leichter ist, sie irgendwann zu vervollkommnen.

§4 Als erster hat Wallis einen in unendlich vielen Faktoren enthaltenen Ausdruck solcher Art in der "Arithmetica infinitorum" vorgeführt, wo er gezeigt hat, wenn der Durchmesser des Kreises $= 1$ ist, dass die Fläche des Kreises sein wird

$$\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11}\text{etc}$$

welchen Ausdruck er aus der Interpolation dieser Reihe abgeleitet hat

$$\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}+\text{etc}$$

deren Zwischenterme er bewiesen hatte, von der Quadratur des Kreises abzuhängen.
Weil also diese Ausdrücke der Interpolation von Reihen ihre Entstehung verdanken, schien es, dass es nicht unpassend sein wird, diese Behandlung über aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkte von Interpolationen aus zu beginnen. Nachdem ich nämlich im fünften Buch unserer "Commentariorum" eine Methode angegeben hatte, Interpolationen durch Quadraturen von Kurven durchzuführen,wird zugleich bekannt werden, eine transzendente Größe von welcher Art auf diese Weise entspringende unendliche Produkte darbieten.

§5 Ich betrachte also die folgende Progression

$$\overset{1}{(f+g)}+\overset{2}{(f+g)(f+2g)}+\overset{3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}+\overset{4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)}+\text{etc}$$

von welcher jeder beliebige Term, dessen Index n ist, aus dem vorhergehenden gefunden wird, indem dieser mit $f+ng$ multipliziert wird; ich habe aber in der eingeführten Abhandlung gezeigt, dass der Term, dessen Index n ist, dieser Reihe dann dieser ist

$$=\frac{g^{n+1}\int dx(-\ln(x))^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

nachdem jede der beiden Integrationen so ausgeführt worden ist, dass die Integrale nach Festlegen von $x=0$ verschwinden, und dann $x=1$ gesetzt worden ist. Deswegen wird dieser Ausdruck zugleich aufzeigen, von welcher Quadratur die einzelnen Zwischenterme abhängen. Obwohl nm̈alich, wenn n eine gebrochene Zahl ist, nicht so leicht klar ist, was für eine Quadratur $\int dx(-\ln(x))^n$ enthält, habe ich dennoch an derselben Stelle gezeigt, dass nach Festlegen von $\frac{p}{q}$ anstelle n die Formel $\int dx(-\ln(x))^{\frac{p}{q}}$ mit dieser übereinstimmt

$$\sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{qp}{q}+1\right)}$$
$$\times\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\cdot\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\cdot\int dx(x^4-x^5)^{\frac{p}{q}}\cdots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

mit Hilfe welcher Reduktion der Wert von $\int dx(-\ln(x))^{\frac{p}{q}}$ durch Quadraturen algebraischer Kurven ausgedrückt werden kann.

§6 Wenn nun in der angenommenen Reihe der Term, dessen Index $=\frac{1}{2}$ ist, z gesetzt wird, werden sich aus dem Bildungsgesetz der Reihe die Terme, deren Indizes $\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}$ etc sind, auf die folgende Weise verhalten:

$$z+z\left(f+\frac{3}{2}g\right)+z\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)+z\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)\left(f+\frac{7}{2}g\right)+\text{etc}$$

Weil ja aber die angenommene Progression schließlich mit der geometrischen vermischt wird, werden diese interpolierten Terme schlißlich die proportionalen Mittel zwischen der benachbarten Termen der Reihe werden. Wenn daher die einzelnen interpolierten Terme schon vom Anfang als proportionale Mittel angesehen werden, werden die folgenden Approximationen an den Term z, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, hervorgehen:

$$\begin{aligned} I.\quad z &= \sqrt{f+g}\\ II.\quad z &= \sqrt{\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{1\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{3}{2}g\right)}}\\ III.\quad z &= \sqrt{\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)(f+2g)(f+3g)}{1\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)}}\\ &\mathit{etc} \end{aligned}$$

aus welchem Fortschreitungsgesetz der Term des Index' $\frac{1}{2}$ eingesehen wird, in Wirklichkeit zu sein

$$=(f+g)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(f+g)(f+2g)(f+2g)(f+3g)(f+3g)(f+4g)(f+4g)(f+5g)(f+5g)(f+6g)}{\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{3}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)\left(f+\frac{5}{2}g\right)\left(f+\frac{7}{2}g\right)\left(f+\frac{7}{2}g\right)\left(f+\frac{9}{2}g\right)\left(f+\frac{9}{2}g\right)\left(f+\frac{11}{2}g\right)\left(f+\frac{11}{2}g\right)}}\ \text{etc}$$

§7 Nun ist also nicht nur gewiss, dass mit diesem unendlichen Ausdruck der Term der angenommenen Reihe

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ (f+g)+ & (f+g)(f+2g)+ & (f+g)(f+2g)(f+3g)+ \text{ etc} \end{array}$$

dessen Index $= \frac{1}{2}$ ist, dargeboten wird, sondern es wird auch derselbe gefundene Ausdruck auf die Quadratur von Kurven zurückgefürt. Denn nach Festlegen von $n = \frac{1}{2}$ wird wegen $p = 1$ und $q = 2$

$$\int dx(-\ln(x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 \cdot 2 \int dx\sqrt{x - xx}}$$

dieser Ausdruck gibt auf die entsprechende Weise integriert die Quadratwurzel aus der Fläche des Kreises, dessen Durchmesser $= 1$ ist; oder, nachdem das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie $1 : \pi$ gesetzt worden ist, wird sein

$$\int dx(-\ln(x))^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Daher wird also derselbe Term, dessen Index $= \frac{1}{2}$ ist, den wir z gesetzt haben, aufgefunden

$$= \frac{h\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int x^{f:g}dx\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int y^{f+g-1}dy\sqrt{1-y^g}}$$

nachdem dieses Integral auf dieselbe behandelt worden ist, auf die es zuvor in Bezug auf die Variable x vorgeschrieben worden ist. Aber durch die Reduktion von Integralformeln dieser Art ist

$$\int y^{f+g-1}dy\sqrt{1-y^g} = \frac{2fg}{(2f+g)(2f+3g)}\int \frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^g}} = \frac{2f}{2f+3g}\int y^{f-1}dy\sqrt{1-y^g}$$

Nachdem diese eingesetzt worden sind, wird aufgefunden

$$\frac{(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(3f+5g)(2f+7g)}{(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)} \text{ etc}$$

$$= \frac{2ff(2f+g)}{\pi g}\left(\int y^{f-1}dy\sqrt{1-y^g}\right)^2 = \frac{2ffg}{\pi(2f+g)}\left(\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^g}}\right)^2$$

Durch diese Gleichung können also unzählige Quadraturen in unendlich viele Faktoren und umgekehrt die Werte von unendlichen Produkten dieser Art in Quadraturen von Kurven transformiert werden.

§8 Damit wir diese Gleichheit an Beispielen illustrieren, sei $g = 1$ und es wird sein

$$\int y^{f-1}dy\sqrt{1-y} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdots(2f-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdots(2f-1)}\text{ etc}$$

Daher wird werden

$$\frac{2ff(2f+1)\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2f-2)(2f-2)}{\pi\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots(2f+1)(2f+1)}\text{ etc} = \frac{(2f+1)(2f+3)(2f+3)}{(2f+2)(2f+2)(2f+4)}\text{ etc}$$

welcher Ausdruck geordnet oder auf eine ununterbrochene Reihe zurückgeführt gibt

$$\pi = 4\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11}\text{ etc}$$

welches die Wallis'sche Formel selbst ist und hervorging, welche ganze positive Zahl auch immer anstelle von f eingesetzt wird. Dieses selbe Ausdruck geht aber hervor, wenn $g = 2$ und $f =$ irgendeiner ungeraden ganzen Zahl gesetzt wird.

§9 Weil also ist

$$\frac{fg}{\pi}\left(\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^g}}\right)^2 = \frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+3g)(2f+6g)}\text{ etc}$$

wird auf die gleiche Weise sein

$$\frac{hk}{\pi}\left(\frac{y^{h-1}dy}{\sqrt{1-y^k}}\right)^2 = \frac{(2h+k)(2h+k)(2h+3k)(2h+3k)(2h+5k)(2h+5k)}{2h(2h+2k)(2h+2k)(2h+4k)(2h+4k)(2h+6k)}\text{ etc}$$

Daher wird nach Dividieren jenes Ausdruckes durch dieser die folgende von der Peripherie des Kreises π freie Gleichung erhalten werden

$$\frac{dg(\int y^{f-1}dy:\sqrt{1-y^g})^2}{hk(\int y^{h-1}dy:\sqrt{1-y^k})^2} = \frac{2h(2f+g)^2(2h+2k)^2(2f+3g)^2(2h+4k)^2(2f+5g)^2}{2f(2h+k)^2(2f+2g)^2(2f+3h)^2(2f+4g)^2(2h+5k)^2}\text{ etc}$$

die nach Ziehen der Quadratwurzel diese Gleichung liefert

$$\frac{\int y^{f-1}dy:\sqrt{1-y^g}}{\int y^{h-1}dy:\sqrt{1-y^k}}\cdot\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{2h(2f+g)(2f+2k)(2f+3g)(2h+4k)(2f+5g)}{2f(2h+k)(2f+2g)(2h+3k)(2f+4g)(2h+5k)}\text{ etc}$$

§10 Dieser unendliche Ausdruck hat aber keinen konstanten Wert; denn, auch wenn er ins Unendliche fortgesetzt wird, hat er dennoch den einen Wert, wenn eine gerade Anzahl an Faktoren genommen wird, ein anderen, wenn ein ungerade Anzahl genommen wird. Deswegen, wenn nicht $k = g$ ist, in welchem Fall es egal ist, wo die Multiplikation abgebrochen wird, sind je zwei Faktoren zusammengenommen anzunehmen, wonach zwei Gleichungen erhalten werden werden, je nachdem ob die Anzahl der Faktoren gerade oder ungerade ist. Zuerst aber, nachdem der allgemeine Ausdruck sorgfältig entwickelt worden ist, wird erhalten werden

$$\frac{g\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^g}}{k\int y^{h-1}dy : \sqrt{1-y^k}}$$

$$= \frac{2h(2f+g)}{2f(2h+k)} \cdot \frac{(2f+2g)(2h+3k)}{(2h+2k)(2f+3g)} \cdot \frac{(2f+4g)(2h+5k)}{(2h+4k)(2f+5g)} \cdot \frac{(2f+6g)(2h+7k)}{(2h+6k)(2f+7g)} \cdot \text{ etc}$$

Indem aber die anderen Paare an Termen genommen werden, wird sein

$$\frac{f\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^g}}{h\int y^{h-1}dy : \sqrt{1-y^k}}$$

$$= \frac{(2f+g)(2h+2k)}{(2h+k)(2f+2g)} \cdot \frac{(2f+3g)(2h+4k)}{(2h+3k)(2f+4g)} \cdot \frac{(2f+5g)(2h+6k)}{(2h+5k)(2f+6g)} \cdot \frac{(2f+7g)(2h+8k)}{(2h+7k)(2f+8g)} \cdot \text{ etc}$$

in welchen Ausdrücken die Stellen, wo es möglich ist, die Operation abzubrechen, mit Punkten kenntlich gemacht worden sind.

§11 Wir wollen aber aufmerksamer den Fall betrachten, in dem $k = g$ ist, in welchem natürlich der unendliche Ausdruck als aus einfachen Faktoren bestehend aufgefasst werden kann, und es wird sein

$$\frac{\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^g}}{\int y^{h-1}dy : \sqrt{1-y^g}} = \frac{2h(2f+g)(2h+2g)(2f+3g)(2h+4g)}{2f(2h+g)(2f+2g)(2h+3g)(2f+4g)} \text{ etc}$$

damit dieser Ausdruck weniger mit dem vorhergehenden wegen derselben Buchstaben durcheinander geworden wird, wollen wir hier $2f = a$ und $2h = b$ und $y = x^2$ setzen, nach Einsetzen wovon hervorgehen wird

$$\frac{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^{2g}}}{\int x^{b-1}dx : \sqrt{1-x^{2g}}} = \frac{b(a+g)(b+2g)(a+3g)(b+4g)(a+5g)}{a(b+g)(a+2g)(b+3g)(a+4g)(b+5g)} \text{ etc}$$

welcher Ausdruck mit dem ersten in §9 gegebenen, der, nachdem in gleicher Weise $y = x^2$ gesetzt worden ist, in diesen übergeht

$$\frac{4fg}{\pi}\left(\frac{x^{2f-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}\right)^2 = \frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)}\ \text{etc}$$

verglichen außergewöhnliche Eigenschaften zeigen wird, deren Gültigkeit sonst kaum gezeigt werden können wird.

§12 Sofort tritt nämlich klar zutage, wenn $a = 2f$, $b = 2f + g$ gesetzt wird, dass jener unendliche Ausdruck in diesen verwandelt wird, deswegen werden auch die jenen gleichen Ausdrücke, die Quadraturen von Kurven enthaltend, in diesem Fall gleich werden, aus welchen die folgende Gleichheit ans Licht tritt:

$$\frac{\int x^{2f-1}dx : \sqrt{1-y^{2g}}}{\int x^{2f+g-1}dx : \sqrt{1-x^{2g}}} = \frac{4fg}{\pi}\left(\int x^{2f-1}dx : \sqrt{1-x^{2g}}\right)^2$$

wenn freilich nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird. Daher folgt also, dass sein wird

$$\pi = 4fg\int\frac{x^{2f-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}\cdot\int\frac{x^{2f+g-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

oder nach Setzen von $2f = a$ wird sein

$$\pi = 2ag\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}\cdot\int\frac{x^{a+g-1}dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

welcher Lehrsatz fürwahr im höchsten Maße des Merkens würdig ist, weil mit dessen Hilfe ein Produkt zweier Integrale, von denen sehr oft keines der beiden dargeboten werden kann, angegeben werden kann.

§13 Die Gültigkeit dieses Lehrsatzes wird freilich leicht in den Fällen aufgezeigt, in denen die Integralformel entweder uneingeschränkt eine Integration zulässt oder von der Quadratur des Kreises abhängt. Wir wollen nämlich $g = 1$ und $a = 1$ setzen; es wird natäurlich sein

$$\pi = 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

denn

$$2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

nachdem nach der Integration x = 1 gesetzt worden ist, gibt die Größe π selbst und

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = 1 - \sqrt{1-xx}$$

wird nach Setzten von $x = 1 = 1$. Auf die gleiche Weise, wenn $a = 2$ ist, während $g = 1$ bleibt, wird erkannt, dass sein wird

$$\pi = 4 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}}$$

denn es ist

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = 1 \quad \text{und} \quad \int \frac{xxdx}{1-xx} = \frac{\pi}{4}$$

in diesen Fällen wird die anderswoher bekannte Gültigkeit des Lehrsatzes bestätigt.

§14 Aber die übrigen Fälle, in denen keine der beiden Integralgrößen entweder tatsächlich oder durch die Quadratur des Kreises dargeboten werden kann, liefern genauso Lehrsätze von im höchsten Maße schwer ergründbarem Umfang. So wird nach Festlegen von $g = 2$ und $a = 1$ werden

$$\pi = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}},$$

wo

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

die Ordinate in der Curva elastica rectangula (rechtwinklige elastische Kurve) darbietet,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

hingegen den der Abszisse x entsprechenden Bogen der Elastica. Deshalb wird das Rechteck aus dem der Abszisse 1 entsprechenden Bogen der Elastica und der entsprechenden Ordinate der Fläche des Kreises gleich werden, dessen Durchmesser jene Abszisse 1 ist; diese Eigenschaft der Elastica wird vielleicht mit einer anderen Methode kaum oder nicht einmal kaum erkannt und bewiesen werden können.

§15 Bevor ich aber diesen Fall der Elastica verlasse, wird es förderlich sein, jedes der beiden Integrale durch eine gewöhnliche Reihe zumindest in dem Fall auszudrücken, in dem $x = 1$ ist. Weil nämlich ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$(1+xx)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \text{etc}$$

werden die einzelnen Glieder von der Quadratur des Kreises abhängen. Nachdem nämlich jede der beiden Integrationen ausgeführt worden sind, wird für den Fall $x = 1$ sein

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 9}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36} + \text{etc}\right)$$

und

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 4} + \frac{1\cdot 9\cdot 5}{4\cdot 16\cdot 6} - \frac{1\cdot 9\cdot 25\cdot 7}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 8} + \text{etc}\right)$$

Daher geht aber durch Approximieren so nahe hervor

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{3}{5}$$

§16 Wenn $a = 1$ war, wird sein

$$\pi = 2g\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}\cdot\int \frac{x^g dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

welche zwei Integralausdrücke so beschaffen sind, dass, wenn

$$\int \frac{x^g dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

die der Abszisse x entsprechende Ordinate einer gewissen Kurve war,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

die Länge selbst derselben Kurve sein wird. Deswegen, wenn in dieser Kurve die Abszisse $x = 1$ genommen wird, verhält sich das Produkt oder das Rechteck aus der Ordinate mit der Länge der Kurve zur Fläche des Kreises, dessen Durchmesser die Abszisse $x = 1$ ist, wie 2 zur Zahl g; diese Proposition hat Geltung, solange g eine positive Zahl war; negative Werte werden nämlich von selbst ausgenommen.

§17 Wenn $a - 1$ kleiner angenommen wird als g, so dass die Zahlen a und g zueinander prim sind, wird man die folgenden des Merkens würdigen Lehrsätze haben; denn wenn ist

$$a + g - 1 > 2g$$

dann könnte die Integration auf eine einfachere Formel zurückgeführt werden

$$\begin{array}{c|c}
\pi = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} & \pi = 24\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^8}} \cdot \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^8}} \\
\pi = 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} & \pi = 10\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \cdot \int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \\
\pi = 6\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}} \cdot \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^6}} & \pi = 20\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^{10}}} \cdot \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \\
\pi = 12\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^6}} \cdot \int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^6}} & \pi = 30\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \cdot \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \\
\pi = 8\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} \cdot \int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^8}} & \pi = 40\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \cdot \int \frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \\
\pi = 12\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{12}}} \cdot \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^{12}}} & \pi = 28\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot \int \frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \\
\pi = 60\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{12}}} \cdot \int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1-x^{12}}} & \pi = 42\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot \int \frac{x^9dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \\
\pi = 14\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{14}}} & \pi = 56\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot \int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1-x^{14}}}
\end{array}$$

$$\pi = 70\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot \int \frac{x^{11}dx}{\sqrt{1-x^{14}}}$$

§18 Nach Finden von diesem selbst ist also auch die Reduktion von Integralformeln auf einfachere vortrefflich vorwärts gebracht worden. Nachdem nämlich bis jetzt diese zwei Formeln

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{m+n}}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

nur aufeinander zurückgeführt werden konnten, wenn n ein Vielfaches des Exponenten $2g$ war, so gelingt nun die Reduktion auch, wenn n nur ein Vielfaches von g war, im Fall, in dem $x = 1$ wird, versteht sich. Wie aber wenn n das Produkt des Exponenten g mit einer geraden Zahl ist, der Quotient, der aus der Division der einen Formel durch die andere resultiert, leicht angegeben wird, so wird hingegen, wenn n ein Produkt aus g mit einer ungeraden Zahl ist, dann das Produkt der Formeln sehr leicht angegeben.

§19 All diese Dinge gehen also darauf zurück, dass, wenn das Integral der Formel

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

im Fall, in dem $x = 1$ ist, bekannt war, in demselben Fall auch das Integral dieser Formel

$$\int \frac{x^{m+n} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

wenn n ein Vielfaches von g war, dargeboten werden kann. Es sei nämlich A das Integral der Formeln

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

im Fall, in dem $x = 1$ ist; die Integrale der anderen Formel werden sich, indem g, $2g$, $3g$ etc nacheinander anstelle von n eingesetzt wird, auf die folgende Weise verhalten:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= A \\
\int \frac{x^{m+g} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= \frac{\pi}{2(m+1)gA} \\
\int \frac{x^{m+2g} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= \frac{(m+1)A}{m+g+1} \\
\int \frac{x^{m+3g} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= \frac{(m+g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)gA} \\
\int \frac{x^{m+4g} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= \frac{(m+1)(m+2g+1)A}{(m+g+1)(m+3g+1)} \\
\int \frac{x^{m+5g} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}} &= \frac{(m+g+1)(m+3g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)(m+4g+1)gA} \\
&\text{etc}
\end{aligned}
$$

§20 Weil darauf diese Integralformel

$$\int x^{m+ig} dx (1+x^2)^{k-\frac{1}{2}}$$

während i und k irgendwelche ganze Zahlen bezeichnen, auf diese Formel zurückgeführt werden kann

$$\int \frac{x^{m+ig} dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

wird eingesehen, dass das Integral jener sich sehr weit erstreckenden Formel $\int x^{m+ig} dx (1-x^{2g})^{k-\frac{1}{2}}$ aus dem bekannten Integral

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$$

angegeben werden kann, zumindest in dem Fall, in dem nach der Integration $x=1$ wird. Die Fälle aber, in denen i eine ungerade Zahl ist, verlangen außer diesem Integral auch die Quadratur des Kreises π.

§21 Wie ich also durch den Term des Index' der oben in §5 angenommenen Reihe zu diesen Vergleichen von Integralformeln geführt worden bin, so wird es vielleicht der Mühe wert sein, andere Zwischenterme auf die gleiche Weise zu untersuchen. Es werde also der Term gesucht, dessen Index $\frac{p}{q}$ ist, der $= z$ gesetzt werde, woher sich die folgenden so verhalten werden:

$$\begin{array}{ccc} \frac{p}{q} & \frac{p+q}{q} & \frac{p+2q}{q} \\ z+ & \frac{z(fq+(p+q))}{q} + & \frac{z(fq+(p+q)g)(fq+(p+2q)g)}{q^2} + \text{etc} \end{array}$$

Indem nun auf die gleiche Weise bedacht wird, dass diese Progression schließlich in die geometrische übergeht, werden die folgenden Approximationen an den Term z entspringen

$$I. \quad z = 1(f+g)^{\frac{p}{q}}$$

$$II. \quad \frac{z(fq+(p+q)g}{q} = (f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}$$

$$III. \quad z\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right) = (f+g)^{\frac{p-q}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}(f+3g)^{\frac{p}{q}}$$

Daher wird also der wahre Wert von z gefunden werden

$$\frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}(f+3g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{1\cdot\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(f+\frac{p+3q}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}} \text{etc}$$

Oder, nachdem wenige Dinge geändert worden sind, dass die infinitesimalen Faktoren $= 1$ werden und der Ausdruck, wo es beliebt, abgebrochen werden kann, wird sein

$$\frac{z}{\left(f+\frac{p}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}}{\left(f+\frac{p}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}}\cdot\text{etc}$$

das Bildungsgesetz welches Ausdrucks, nach welchem die Faktoren fortschreiten, von selbst hervortritt.

§22 Aber der Wert desselben Zwischenterms z kann mit Hilfe des allgemeinen Terms dieser Reihe ausgedrückt werden; es wird nämlich werden

$$z = \frac{g^{\frac{p+q}{q}}\int dx(-\ln(x))^{\frac{p}{q}}}{\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}}$$

Daher, wenn wird

$$\int dx(-\ln(x))^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{qp}{q}+1\right)}$$

$$\times\int dx(x-x^2)^{\frac{p}{q}}\cdot\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\cdot\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\cdots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{P}$$

und $x = y^g$ gesetzt wird, wodurch wird

$$\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}} = g\int y^{f+g-1}dx(1-y^g)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{ggp}{fq+(p+q)g}\int\frac{y^{f+g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = \frac{pfqq}{q\left(f+\frac{p}{q}g\right)\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)}\int\frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$$

weiter festgelegt wird

$$\int\frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = Q$$

wird sein

$$z = \frac{q\left(f+\frac{p}{q}g\right)p^{\frac{1}{q}}}{pfg^{\frac{q-p}{q}}Q}$$

§23 Nachdem nun anstelle von z der obere unendliche Ausdruck eingesetzt worden ist und die Potenzen des Exponenten q genommen worden sind, wird diese Gleichung hervorgehen

$$\frac{q^qP}{p^qf^pg^{q-p}Q^q} = \frac{f^{q-p}}{\left(f+\frac{p}{q}g\right)^{q-p}}\cdot\frac{(f+g)^p}{\left(f+\frac{p}{q}g\right)^p}\cdot\frac{(f+g)^{q-p}}{\left(f+\frac{p+q}{q}\right)^{q-p}}\cdot\frac{(f+2g)^p}{\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)^p}\cdot\frac{(f+2g)^{q-p}}{\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)^{q-p}}\cdot\text{etc}$$

Wenn also auf die gleiche Weise festgelegt wird

$$\int\frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = R$$

wird sein

$$\frac{p^qh^pg^{q-p}R^q}{q^qP} = \frac{\left(h+\frac{p}{q}g\right)^{q-p}}{h^{q-p}}\cdot\frac{\left(h+\frac{p}{q}g\right)^p}{(h+g)^p}\cdot\frac{\left(h+\frac{p+q}{q}g\right)^{q-p}}{(h+g)^{q-p}}\cdot\text{etc}$$

§24 Wenn also auf beiden Seiten mit $\frac{f^p}{h^p}$ multipliziert wird und die Wurzel der Potenz q gezogen wird, wird aufgefunden werden

$$\frac{R}{Q}=\frac{f\left(h+\frac{p}{q}g\right)(f+g)\left(h+\frac{p+q}{q}g\right)(f+2g)\left(h+\frac{p+2q}{q}g\right)}{h\left(f+\frac{p}{q}g\right)(h+g)\left(f+\frac{p+q}{q}g\right)(h+2g)\left(f+\frac{p+2q}{q}g\right)}\text{ etc}$$

$$=\frac{\int y^{h-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}$$

in welchen Integralen, nachdem sie so angenommen worden sind, dass sie nach Setzen von $y=0$ verschwinden, $y=1$ werden muss, wonach man durch Quadraturen der Wert des vorgelegten unendlichen Ausdruckes haben wird. Mit Hilfe dieses unendlichen Ausdruckes wird also die eine Quadratur auf die andere, wenn freilich $y=1$ gesetzt wird, zurückgeführt werden können.

§25 Um aber daher Vergleiche von Integralen solcher Art abzuleiten, so wie aus dem ersten Fall, in welchem $p=1$ und $q=2$ war, wollen wir hier $p=1$ und $q=3$ setzen und es wird werden

$$P=\frac{10}{3}\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot\int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}$$

und

$$Q=\int\frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$$

Es wird also sein

$$\frac{27P}{fg^2Q^3}=\frac{ff(f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)}{\left(f+\frac{1}{3}g\right)\left(f+\frac{1}{3}g\right)\left(f+\frac{1}{3}g\right)\left(f+\frac{4}{3}g\right)\left(f+\frac{4}{3}g\right)\left(f+\frac{4}{3}g\right)}\text{ etc}$$

und

$$\frac{R}{Q}=\frac{f\left(h+\frac{1}{3}g\right)(f+g)\left(h+\frac{4}{3}g\right)(f+2g)\left(h+\frac{7}{3}g\right)}{h\left(f+\frac{1}{3}g\right)(h+g)\left(f+\frac{4}{3}g\right)(h+2g)\left(f+\frac{7}{3}g\right)}\text{ etc}$$

welche zwei Ausdrücke, weil in jenem ein einziger Abschnitt aus drei, hier aber aus zwei Faktoren besteht, nicht ineinander transformiert werden können, was auch immer für h eingesetzt wird.

§26 Es sei also

$$S = \int \frac{y^{k-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$$

es wird sein

$$\frac{S}{Q} = \frac{f\left(k+\frac{1}{3}g\right)(f+g)\left(k+\frac{4}{3}g\right)(f+2g)\left(k+\frac{7}{3}g\right)}{k\left(f+\frac{1}{3}g\right)(k+g)\left(f+\frac{4}{3}g\right)(k+2g)\left(f+\frac{7}{3}g\right)} \text{ etc}$$

welcher Ausdruck mit dem vorhergehenden verbunden geben wird

$$\frac{RS}{Q^2} = \frac{ff\left(h+\frac{1}{3}g\right)\left(k+\frac{1}{3}g\right)(f+g)(f+g)\left(h+\frac{4}{3}g\right)}{hk\left(f+\frac{1}{3}g\right)\left(f+\frac{1}{3}g\right)(h+g)(k+g)\left(f+\frac{4}{3}g\right)} \text{ etc}$$

welcher Ausdruck in jenen $\frac{27P}{fg^2Q^3}$ gleichen umgewandelt werden wird, indem festgelegt wird

$$h = f + \frac{1}{3}g \quad \text{und} \quad k = f + \frac{2}{3}g$$

Deswegen wird man diese Gleichung haben

$$\frac{27P}{fg^2} = QRS$$

oder es wird nach Einsetzten der wahren Werte sein

$$90\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}} = fg^2 \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$$

§27 Bevor wir aber diesen Dingen weiter nachgehen, wird es passend sein, dass dem Wert von P eine gefälligere Form gegeben wird. Weil aber nach Setzen von $x = z^q$ ist

$$\int dx(x^n - x^{n+1})^{\frac{p}{q}} = \frac{npq}{(n+1)((n+1)p+q)} \int \frac{z^{np-1}dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$$

wird nach der Substitution hervorgehen

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \cdot \frac{p^{q-1}}{q} \int \frac{z^{p-1}dz}{(1-z^p)^{\frac{q-p}{q}}} \cdot \int \frac{z^{3p-1}dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \cdots \int \frac{z^{(q-1)p-1}dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$$

Wenn aus diesem Ausdruck die Wurzel der Potenz q gezogen wird, wird der Wert von $\int dx(-\ln(x))^{\frac{p}{q}}$ hervorgehen.

§28 Nachdem nun $p = 1$ und $p = 3$ gesetzt worden ist, wird hervorgehen

$$P = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Aber nach Setzen von $y = z^3$ wird die folgende Gleichung erhalten werden

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = 3fg^2 \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$$

Wenn nun $3f = a$ gesetzt wird, wird die folgende des Merkens würdige Gleichung entspringen

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$$

Diese mit der oberen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{1-z^{2g}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{1-z^{2g}}}$$

verglichen zeigt schon gewissermaßen auf, wie sich die folgenden Gleichungen dieses Geschlechts verhalten werden.

§29 Bevor ich aber das Schließen von etwas durch Induktion versuche, möchte ich einige Fälle tatsächlich entwickeln. Es sei also $p = 2$ und $q = 3$ und daher wird aufgefunden werden

$$P = \frac{8}{3}\int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^3dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{9}\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}},$$

$$Q = \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}, \quad R = \int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$$

Die unendlichen Ausdrücke werden sich aber so verhalten:

$$\frac{27P}{8f^2gQ^3} = \frac{f(f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)(f+2g)}{\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{5}{3}g\right)\left(f+\frac{5}{3}g\right)\left(f+\frac{5}{3}g\right)} \text{ etc}$$

und

$$\frac{R}{Q} = \frac{f\left(h+\frac{2}{3}g\right)(f+g)\left(h+\frac{5}{3}g\right)(f+2g)\left(h+\frac{8}{3}g\right)}{h\left(f+\frac{2}{3}g\right)(h+g)\left(f+\frac{5}{3}g\right)(h+2g)\left(f+\frac{8}{3}g\right)} \text{ etc}$$

Es sei außerdem

$$S = \int \frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{und} \quad T = \int \frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$$

es wird sein

$$\frac{T}{S} = \frac{m\left(n+\frac{2}{3}g\right)(m+g)\left(n+\frac{5}{3}g\right)(m+2g)}{n\left(m+\frac{2}{3}g\right)(n+g)\left(m+\frac{5}{3}g\right)(n+2g)} \text{ etc}$$

welche zwei Ausdrücke miteinander multipliziert geben

$$\frac{RT}{QS} = \frac{fm\left(h+\frac{2}{3}g\right)\left(n+\frac{2}{3}g\right)(f+g)(m+g)\left(h+\frac{5}{3}g\right)\left(n+\frac{5}{3}g\right)}{hn\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(m+\frac{2}{3}g\right)(h+g)(n+g)\left(f+\frac{5}{3}g\right)\left(m+\frac{5}{3}g\right)} \text{ etc}$$

§30 Aber dieser Ausdruck kann auf jenen, welchem $\frac{27P}{8f^2gQ^3}$ gleich gefunden worden ist, nicht zurückgeführt werden, wenn jener nicht mit $\frac{f}{f-\frac{1}{3}g}$ multipliziert wird, so dass ist

$$\frac{27P}{8fg\left(f-\frac{1}{3}g\right)Q^3} = \frac{ff(f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)}{\left(f-\frac{1}{3}g\right)\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{2}{3}g\right)\left(f+\frac{5}{3}g\right)\left(f+\frac{5}{3}g\right)} \text{ etc}$$

nun wird nämlich die Reduktion durchgeführt, indem festgelegt wird

$$m = f, \quad h = f - \frac{1}{3}g \quad \text{und} \quad n = f + \frac{1}{3}g$$

Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird sein

$$\frac{27P}{8fg\left(f-\frac{1}{3}g\right)Q^3} = \frac{RT}{QS}$$

Weil aber $S = Q$ ist und

$$R = \int \frac{y^{f-\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}} = \frac{f+\frac{1}{3}g}{f-\frac{1}{3}g}\int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$$

und

$$T = \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$$

wird diese Gleichung erhalten werden, nachdem $y = z^3$ gesetzt worden ist

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = 3fg(3f+g) \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

Und wenn $3f = a$ gesetzt wird, wird sein

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

§31 Wir wollen $p = 1$ und $q = 4$ setzen und man wird haben

$$\frac{4^4 P}{fg^3 Q^4} = \frac{fff\,(f+g)\,(f+g)\,(f+g)}{\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{5}{4}g\right)\left(f+\frac{5}{4}g\right)} \text{ etc}$$

und

$$\frac{R}{Q} = \frac{f\left(h+\frac{1}{4}g\right)(f+g)\left(h+\frac{5}{4}g\right)(f+2g)}{h\left(f+\frac{1}{4}g\right)(h+g)\left(f+\frac{5}{4}g\right)(h+2g)} \text{ etc}$$

Es sei aber wie zuvor

$$S = \int \frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}, \quad T = \int \frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$$

es wird sein

$$\frac{RST}{Q^3} = \frac{fff\left(h+\frac{1}{4}g\right)\left(m+\frac{1}{4}g\right)\left(n+\frac{1}{4}g\right)(f+g)}{hmn\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{1}{4}g\right)(h+g)} \text{ etc}$$

von welchem Ausdruck 6 Faktoren in vier von jenem zu verwandeln sind, was geschehen wird, indem festgelegt wird

$$h = f + \frac{1}{4}, \quad m = f + \frac{2}{4}g \quad \text{und} \quad n = f + \frac{3}{4}g$$

wonach man haben wird

$$4^4 P = fg^3 QRST$$

Daher, weil ist

$$P = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$$

wenn $y = z^4$ und $4f = a$ gesetzt wird, wird diese Gleichung entspringen

$$\int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

deren Zusammenhang mit den vorhergehenden Fällen, in denen $p = 1$, $q = 2$ und $p = 1$, $q = 3$ war, leicht erkannt wird.

§32 Aus diesen Dingen wird es also möglich sein, alle Gleichungen dieser Art, die entspringen werden, wenn $p = 1$ und $q =$ irgendeiner ganzen positiven Zahl gesetzt wird, zu bilden; es wird natürlich sein

$$I. \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{1-z^{2g}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{1-z^{2g}}}$$

$$II. \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$$

$$III. \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

$$IV. \int \frac{dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^3dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}}$$

$$= ag^4 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+4g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}}$$

etc

§33 Damit wir auch die Gleichungen, die entspringen, wenn p nicht $= 1$ ist, erschließen können, wollen wir $p = 3$ und $q = 4$ setzen; nachdem dies festgelegt worden ist und während das Übrigen wie oben bleiben, wird sein

$$\frac{4^4 P}{3^4 f^3 g Q^4} = \frac{f\,(f+g)\,(f+g)\,(f+g)}{\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)} \text{ etc}$$

wo die übrigen aus vier Faktoren bestehenden Glieder aus diesen gebildet werden, indem die einzelnen Faktoren um die Größe g vermehrt werden. Auf die gleiche Weise wird aber sein

$$\frac{RST}{Q^3} = \frac{fff\left(h+\frac{3}{4}g\right)\left(m+\frac{3}{4}g\right)\left(n+\frac{3}{4}g\right)}{hmn\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)} \text{ etc}$$

wo je sechs Faktoren einen Umlauf oder eine Periode festlegen. Um aber den Vergleich durchzuführen, ist es von Nöten, dass jede der beiden Reihen so betrachtet wird

$$\begin{aligned}
\frac{4^4 P}{3^4 f^2 g\left(f-\frac{1}{4}g\right)Q^4} &= \frac{ff\,(f+g)\,(f+g)}{\left(f-\frac{1}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)} \text{ etc}\\
\frac{hRST}{fQ^3} &= \frac{ff\left(h+\frac{3}{4}g\right)\left(m+\frac{3}{4}g\right)\left(n+\frac{3}{4}g\right)(f+g)}{mn\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)\left(f+\frac{3}{4}g\right)(h+g)} \text{ etc}
\end{aligned}$$

von denen diese in jene verwandelt wird, so dass wird

$$\frac{4^4 P}{3^4 fgh\left(f-\frac{1}{4}g\right)Q^4} = QRST$$

wenn wird

$$h = f + \frac{1}{4}g\,, \quad m = f - \frac{1}{4}g \quad \text{und} \quad n = f + \frac{2}{4}g$$

§34 Weil also ist

$$\begin{aligned}
P =& \frac{3^4}{2}\int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int \frac{z^5dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\int \frac{z^8dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\\
=& \frac{3^4}{32}\int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

und

$$Q = \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}, \quad R = \int \frac{y^{f+\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$$

$$S = \int \frac{y^{f-\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}} = \frac{f+\frac{2}{4}g}{f-\frac{1}{4}g} \int \frac{y^{f+\frac{3}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$$

und

$$T = \int \frac{y^{f+\frac{2}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$$

aus welchen nach Festlegen von $y = z^4$ und $4f = a$ die folgende Gleichung erschlossen wird

$$\int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$$
$$= ag\frac{(a+g)(a+2g)}{1\cdot 2} \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}$$

§35 Indem auf diese Weise fortgeschritten wird, werden die folgenden Gleichungen aufgefunden werden, wann immer p nicht $= 1$ ist; und zwar, wenn $p = 2$ ist, wird gefunden werden

$$I. \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

$$II. \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}}$$
$$= ag^2(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}}$$

Allgemein aber, was auch immer q ist, wenn festgelegt wird

$$\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-2}{q}}} = Xdz \quad \text{und} \quad \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-2}{q}}} = Ydz$$

wird sein

$$\int Xdz \cdot \int zXdz \cdot \int z^2Xdz \cdots \int z^{q-2}Xdz$$
$$= ag^{q-2}(a+g) \int Ydz \cdot \int z^gYdz \cdot \int z^{2g}Ydz \cdots \int z^{(q-1)g}Ydz$$

§36 Auf die gleiche Weise, wenn $p = 3$ ist und festgelegt wird

$$\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-3}{q}}} = Xdz \quad \text{und} \quad \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-3}{q}}} = Ydz$$

wird die folgende allgemeine Gleichung hervorgehen

$$\int Xdz \cdot \int zXdz \cdot \int z^2Xdz \cdots \int z^{q-2}Xdz$$
$$= ag^{q-3}\frac{(a+g)(a+2g)}{1\cdot 2}\int Ydz \cdot \int z^gYdz \int z^{2g}Ydz \cdots \int z^{(q-1)g}Ydz$$

Und daher ist es möglich, dass alle Formeln zu einer sich sehr weit erstreckenden gesammelt werden. Es seien nämlich p und q irgendwelche positiven ganzen Zahlen und es werde festgelegt

$$\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} = Xdz \quad \text{und} \quad \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-p}{q}}} = Ydz$$

man wird haben

$$\int Xdz \cdot zXdz \cdot \int z^2Xdz \cdots \int z^{q-2}Xdz$$
$$= ag^{q-p}\frac{(a+g)(a+2g)(a+3g)\cdots(a+(p-1)q)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)}\int Ydz \cdot \int z^gYdz \cdot \int z^{2g}Ydz \cdots \int z^{(q-1)g}Ydz$$

§37 Weil aber ist

$$\int z^{q-1}Xdz = \frac{1}{p}$$

wenn mit diesen Faktoren auf beiden Seiten multipliziert wird, wird die folgende ziemlich elegante Gleichung hervorgehen

$$\frac{a(a+g)(a+2g)(a+3g)\cdots(a+(p-1)g)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots p}g^{q-p}$$
$$= \frac{\int Xdz}{\int Ydz}\cdot\frac{\int zXdz}{\int z^gYdz}\cdot\frac{\int z^2Xdz}{\int z^{2g}Ydz}\cdot\frac{\int z^3Xdz}{\int z^{3g}Ydz}\cdots\frac{\int z^{q-1}Xdz}{\int z^{(q-1)g}Ydz}$$

welcher Ausdruck alle bisher gefundenen in sich umfasst und wegen der hervorstechenden Ordnung des Merkens würdig ist.

§38 Ich schreite nun zu einer anderen Methode voran, mit deren Hilfe es möglich ist, zu aus unzähligen Faktoren dieser Art bestehenden Produkten von dieser Art zu gelangen, die mehr für die Analysis geeignet ist. Ich habe nämlich beobachtet, dass aus der Reduktion von Integralformeln auf andere Ausdrücke dieser Art erhalten werden können. Es sei nämlich diese Integralformel vorgelegt

$$\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

die nicht schwer in diesen Ausdruck verwandelt wird

$$\frac{x^m(1-x^{nq})^{\frac{p+q}{q}}}{m}+\frac{m+(p+q)n}{m}\int x^{m+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

Wenn also m und $\frac{p+q}{q}$ positive Zahlen waren und die Integrale so genommen werden, dass sie nach Setzen von $x=0$ gesetzt verschwinden, und dann $x=1$ festgelegt wird, wird werden

$$\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}=\frac{m+(p+q)n}{m}\int x^{n+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

§39 Weil darauf auf die gleiche Weise ist

$$\int x^{m+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}=\frac{m+(p+2q)n}{m+nq}\int x^{n+2nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

wird auch sein

$$\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}=\frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)}{m(m+nq)}\int x^{m+2nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

Nachdem also diese Reduktion ins Unendliche fortgesetzt worden ist, wird hervorgehen

$$\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)(m+(p+3q)n)\cdots(m+(p+\infty q)n)}{m(m+nq)(m+2nq)\cdots(m+\infty nq)}\int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

und auf die gleiche Weise ist

$$\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{(\mu+(p+q)n)(\mu+(p+2q)n)(\mu+(p+3q)n)\cdots(\mu+(p+\infty q)n)}{\mu(\mu+nq)(\mu+2nq)\cdots(\mu+\infty nq)}\int x^{\mu+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

solange m und μ und nq und $\frac{p+q}{q}$ positive oder größere Zahlen als Null sind.

§40 Weil ja aber, wenn m unendlich ist, wird

$$\int x^m dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{m+\alpha} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

welche endliche Zahl auch immer anstelle von α angenommen wird, wie aus Paragraph 38 erschlossen wird, wird auch sein

$$\int x^{m+\infty nq-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{\mu+\infty nq-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$$

Deswegen, wenn der eine der vorhergehenden Ausdrücke durch den anderen dividiert wird, wird diese Gleichung hervorgehen

$$\frac{\int x^{m-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}}$$
$$= \frac{\mu(m+(p+q)n)(\mu+nq)(m+(p+2q)n)(\mu+2nq)(m+(p+3q)n)(\mu+3nq)}{m(\mu+(p+q)n)(m+nq)(\mu+(p+2q)n)(m+2nq)(\mu+(p+3q)n)(m+3nq)} \text{ etc ins Undendl.}$$

mit Hilfe welches Ausdruckes unzählige aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkte dargeboten werden können, deren Werte durch Quadraturen von Kurven angegeben werden können werden.

§41 Wenn die eine Integralformel eine Integration zulässt, dann wird man einen bequemen unendlichen Ausdruck für das Integral haben. Es sei nämlich $\mu = nq$; es wird sein

$$\int x^{\mu-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)q}$$

nach Einsetzen welches Wertes hervorgehen wird

$$\int x^{m-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n} \cdot \frac{nq(m+(p+q)n)2nq(m+(p+2q)n)3nq}{m(p+2q)n(m+nq)(p+3q)n(m+3nq)} \text{ etc}$$

mit dessen Hilfe für unzählige Integrale durch aufeinander folgende Faktoren ins Unendliche laufende Ausdrücke gefunden werden können; zumindest in dem Fall, in dem $x = 1$ ist, welcher natürlich meistens hauptsächlich verlangt wird.

§42 Es werde n anstelle von nq gesetzt und es wird hervorgehen

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n}\cdot\frac{n(mq+(p+q)n)2n(mq+(p+2q)n)3n(mq+(p+3q)n)}{m(p+2q)n(m+n)(p+3q)n(m+2n)(p+4q)n}\text{ etc}$$

welche in je zwei Faktoren aufgelöst vereinfacht wird und es wird

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{q}{(p+q)n}\cdot\frac{1(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)}\cdot\frac{2(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)}\cdot\frac{3(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)}\cdot\text{etc}$$

woher die folgenden bemerkenswerteren Beispiele abgeleitet werden:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}=1\cdot\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 8}{3\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 12}{5\cdot 7}\cdot\text{ etc}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}\text{etc}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-xx}}=1\cdot\frac{1\cdot 6}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 10}{4\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 14}{6\cdot 7}\cdot\text{ etc}=1$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-xx}}=1\cdot\frac{1\cdot 8}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 12}{5\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 16}{7\cdot 7}\cdot\text{ etc}=\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}\text{etc}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot 5\cdot 2\cdot 11\cdot 3\cdot 17\cdot 4\cdot 23\cdot 5\cdot 29}{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 10\cdot 9\cdot 13\cdot 11}\text{etc}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot 7\cdot 2\cdot 13\cdot 3\cdot 19\cdot 4\cdot 25\cdot 5\cdot 31}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 9\cdot 14\cdot 11}\text{etc}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6\cdot 2\cdot 14\cdot 3\cdot 22\cdot 4\cdot 30}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9}\text{etc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 11\cdot 8\cdot 15}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9}\text{etc}$$

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 10\cdot 2\cdot 18\cdot 3\cdot 26\cdot 4\cdot 34}{3\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 7\cdot 15\cdot 9}\text{etc}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 3\cdot 6\cdot 6\cdot 9\cdot 9\cdot 12\cdot 12}{1\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 10\cdot 14}\text{etc}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12\cdot 16\cdot 16}{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 9\cdot 15\cdot 13\cdot 19}\text{etc}$$

Aßerdem verdienen diese Ausdrücke angemerkt zu werden

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{n-m}\cdot\frac{n\cdot n\cdot 2n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}{m(2n-m)(m+n)(2n-m)(m+2n)(4n-m)}\text{ etc}$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{n\cdot 2m\cdot 2n(2m+n)3n(2m+2n)4n(2m+3n)}{m(m+n)(m+n)(m+2n)(m+2n)(m+3n)(m+3n)(m+4n)}\text{ etc}$$

§43 Weil aber auf die gleiche Weise ist

$$\int x^{\mu-1}dx(1-x^{\vartheta})^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{(r+s)\vartheta}\cdot\frac{1(\mu s+(r+s)\vartheta)2(\mu s+(r+2s)\vartheta)3(\mu s+(r+3s)\vartheta)}{\mu(r+2s)(\mu+\vartheta)(r+3s)(\mu+2\vartheta)(r+4s)}\text{ etc}$$

wird, indem der erste Ausdruck durch diesen dividiert wird, sein

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^{\vartheta})^{\frac{r}{s}}}$$

$$=\frac{(r+s)q\vartheta}{(p+q)sn}\cdot\frac{\mu(r+2s)(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)(\mu s+(r+s)\vartheta)}\cdot\frac{(\mu+\vartheta)(r+3s)(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)(\mu s+(r+2s)\vartheta)}\cdot\text{ etc}$$

Sooft also dieser unendliche Ausdruck einen endlichen Wert hat, sooft wird die Summation des einen Integrals auf das andere zurückgeführt werden können. Es gibt aber Fälle von dieser Art, wann immer die Faktoren des Zählers die Faktoren des Nenners aufheben, so dass nach der Aufhebung eine endliche Anzahl an Faktoren übrig bleibt. Es sind nmalich in diesem Ausdruck ganz und gar alle Reduktionen von Integralformeln auf andere enthalten.

§44 Damit aber mehrere Ausdrücke dieser Art miteinander verglichen werden können, erscheint es ratsam, sie auf diese Weise anzunehmen:

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^h}=\frac{(h+1)g}{(c+1)b}\cdot\frac{f(h+2)(a+(c+1)b)}{a(c+2)(f+(h+1)g)}\cdot\frac{(f+g)(h+3)(a+(c+2)b)}{(a+b)(c+3)(f+(h+2)g)}\cdot\text{ etc}$$

Auf die gleiche Weise wird sein

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\beta})^{\gamma}}{\int x^{\xi-1}dx(1-x^{\eta})^{\Theta}}=\frac{(\Theta+1)\eta}{(\gamma+1)\beta}\cdot\frac{\xi(\Theta+2)(\alpha+(\gamma+1)\beta)}{\alpha(\gamma+2)(\xi+(\Theta+1)\eta)}\cdot\frac{(\xi+\eta)(\Theta+3)(\alpha+(\gamma+2)\beta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+3)(\xi+(\Theta+2)\eta)}\cdot\text{ etc}$$

Wenn das Produkt dieser Ausdrücke $= \frac{f}{a}$ gesetzt wird, ist es von Nöten, dass ist

$$\frac{(a+(c+1)b)(f+b)\xi(a+(c+1)b)}{(f+(c+1)b)(a+b)\alpha(\xi+(c+1)b)} = 1$$

wenn dies nämlich galt, wird das Produkt der ganzen unendlichen Ausdrücke $= \frac{f}{a}$ werden. Aber dies wird erhalten werden, indem gesetzt wird

$$\alpha = a+(c+1)b\,, \quad \xi = f+(c+1)b$$

und es wird werden

$$c = -\frac{1}{2}$$

so dass ist

$$\alpha = a+\frac{1}{2}b\,, \quad \xi = f+\frac{1}{2}b$$

und es wird daher sein

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{1-x^b}} \cdot \int \frac{x^{a+\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{1-x^b}} = \frac{f}{a}\int \frac{x^{f-1}dx}{\sqrt{1-x^b}} \cdot \int \frac{x^{a\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{1-x^b}}$$

oder, wenn $x = z^2$ gesetzt wird, wird sein

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}} = \frac{f}{a}\int \frac{z^{f-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}} \cdot \int \frac{z^{f+b-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}}$$

woher werden wird

$$\pi = 2ab\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{1-z^{2b}}}$$

§46 Auf die gleiche Weise können andere Lehrsätze dieser Art gefunden werden; es sei nämlich

$$g = b\,, \quad h = c\,, \quad \eta = \beta = b \quad \text{und} \quad \Theta = \gamma$$

und es werde der Fall gesucht, in welchem das Produkt der beiden Ausdrücke $= 1$ werde. Dies wird aber erhalten werden, wenn gilt

$$\frac{f(a+(c+1)b)\xi(\alpha+(\gamma+1)b)}{a(f+(c+1)b)\alpha(\xi+(\gamma+1)b)} = 1$$

was geschehen wird, indem genommen wird

$$\alpha = a + (c+1)b\,, \quad f = a + (\gamma+1)b\,, \quad \xi = a$$

Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird der folgende nicht unelegante Lehrsatz entspringen

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^\gamma}\cdot\frac{\int x^{a+(c+1)b-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{a+(\gamma+1)b-1}dx(1-x^b)^c} = 1$$

oder, wenn festgelegt wird

$$c+1 = m \quad \text{und} \quad \gamma+1 = n$$

wird man haben

$$\int\frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}\cdot\int\frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} = \int\frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$$

§47 Darüber hinaus wird auf andere Weise ein gefälliger Lehrsatz gefunden werden können, indem $\gamma = h$ und $\Theta = c$ gesetzt wird, während $\eta = \beta = g = b$ bleibt, und indem bewirkt wird, dass das Produkt der Integralausdrücke $= \frac{f}{a}$ wird; damit dies passiert, ist es von Nöten, dass ist

$$\frac{(f+(c+1)b)(f+b)\xi(\alpha+(h+1)b)}{(f+(h+1)b)(a+b)\alpha(\xi+(c+1)b)} = 1$$

Dies wird aber bewirkt werden, indem genommen wird

$$\alpha = a + (c+1)b\,, \quad \xi = f + (h+1)b$$

Woher aufgefunden werden wird

$$c + h + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad h = -1 - c$$

daher werde genommen

$$c = -\frac{1}{2} + n \quad \text{und} \quad h = -\frac{1}{2} - n$$

und es wird der folgende Lehrsatz hervorgehen

$$\frac{f}{a} = \frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}\cdot\int x^{a+\left(\frac{1}{2}+n\right)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot\int x^{f+\left(\frac{1}{2}-n\right)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}$$

§48 Es seien nun alle Exponenten c,h,γ und Θ ungleich, oder $g = \beta = \eta = b$, und es werden Fälle gesucht, in denen das Produkt der beiden Ausdrücke $= \frac{(h+1)(\Theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)}$ werde. Dies wird aber passieren, wenn diese Form

$$\frac{f(bh+2b)(a+(c+1)b)\xi(b\Theta+2b)(\alpha+(\gamma+1)b)}{a(bc+2b)(f+(h+1)b)\alpha(b\gamma+2b)(\xi+(\Theta+1)b)} = 1$$

gemacht wird, welche Faktoren ich so ausgedrückt habe, dass die einzelnen in den folgenden Gliedern um die Größe b wachsen. Es werde nun festgelegt

$$\xi + (\Theta+1)b = bh + 2b \quad \text{oder} \quad \xi = b(1+h-\Theta)$$

und

$$\alpha + (\gamma+1)b = bc + 2b \quad \text{oder} \quad \alpha = b(1+c-\gamma)$$

Weiter werde

$$f + (h+1)b = b\Theta + 2b \quad \text{oder} \quad f = b(1+\Theta-h)$$

und

$$a + (c+1)b = b\gamma + 2b \quad \text{oder} \quad a = b(1+\gamma-c)$$

Schließlich wird $\alpha = f$ und $\xi = a$ sein müssen, welche zwei Gleichungen fordern, dass ist

$$c - \gamma = \Theta - h \quad \text{oder} \quad c + h = \gamma + \Theta$$

Daher wird der folgende Lehrsatz entspringen

$$\frac{(h+1)(\Theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)} = \frac{\int x^{b(1+\gamma-c)-1}dx(1-x^b)^c \cdot \int x^{b(1+c-\gamma)-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{b(1+\theta-h)-1}dx(1-x^b)^h \cdot \int x^{b(1+h+\Theta)-1}dx(1-x^b)^\Theta}$$

solange $c + h = \gamma + \Theta$ ist.

§49 Darüber hinaus kann aber jener Ausdruck auf eine andere Weise $= 1$ gemacht werden, indem festgelegt wird $\alpha = a + (c+1)b$ und $\xi = f + (h+1)b$,$f = b(\gamma+2)$, $a = b(\Theta+2)$ so dass ist

$$\alpha = b(3+c+\Theta) \quad \text{und} \quad \xi = b(3+h+\gamma)$$

Weiter muss aber sein

$$\xi + (\Theta+1)b = bh + 2b \quad \text{und} \quad \alpha + (\gamma+1)b = bc + 2b$$

von diesen wird erfordert, dass ist

$$\gamma + \Theta + 2 = 0$$

Es werde also festgelegt

$$\gamma = -1 + n \quad \text{und} \quad \Theta = -1 - n$$

Aber wenn verlangt wird, dass das Produkt der beiden Ausdrücke $= \frac{f(h+1)(\Theta+1)}{a(c+1)(\gamma+1)}$ wird das erhalten werden, indem festgelegt wird

$$\alpha = a + (c+1)b\,, \quad \xi = f + (h+1)b\,, \quad f = b(\gamma+1)\,, \quad a = b(\Theta+1)$$

woher sein wird

$$\alpha = b(2 + c + \Theta) \quad \text{und} \quad \xi = b(2 + h + \gamma)$$

Endlich wird aber sein müssen

$$\gamma + \Theta + 1 = 0$$

Es werde festgelegt

$$\gamma = -\frac{1}{2} + n \quad \text{und} \quad \Theta = -\frac{1}{2} + n$$

und, man wird diesen Lehrsatz haben

$$\frac{h+1}{c+1} = \frac{\int x^{b\left(\frac{1}{2}-n\right)-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{b\left(\frac{1}{2}+n\right)-1}dx(1-x^b)^h} \cdot \frac{\int x^{b\left(\frac{3}{2}+c-n\right)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}{\int x^{b\left(\frac{3}{2}+h+n\right)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}$$

in welchem anzumerken ist, dass die Exponenten c,h,$-\frac{1}{2}+n$,$-\frac{1}{2}-n$ freilich negative Zahlen sein können, aber solche, dass sie mit der Einheit zu positiven übergehen; andernfalls erhielten nämlich die Integrale im Fall $x = 1$ nicht einen endlichen Wert.

§50 Wie ich also nicht nur den oben gefundenen Lehrsatz über die Produkte von zwei Integralformeln mit dieser direkteren Methode entdeckt habe, sondern auch andere neue nicht weniger des Merkens würige gefunden habe, so, wenn auf gleiche Weise drei Ausdrücke solcher Art miteinander multipliziert werden, werden nicht wenige Lehrsätze über die Produkte dreier Integralformeln hervorgehen und es wird möglich sein, darüber hinaus zu irgendeiner Anzahl an Faktoren fortzuschreiten; aber weil diese Untersuchung äußerst lange Berechnung verlangt, dass sogar die Buchstaben kaum genügen, werde ich sowohl mit angegebenen eingetümlichen Theoremen als auch dem bewiesenen Weg zufrieden sein.